

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

21 iulie 2026

Probă scrisă

MATEMATICĂ

Varianta 1

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră expresia $E(x, y) = x^{\log_y 2} \cdot y^{\log_x 2}$, unde $x, y \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
- 5p a) Arătați că $E\left(2, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
- 5p b) Demonstrați că $E(x^n, y^n) = E(x, y)$, pentru orice $x, y \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ și orice număr natural nenul n .
- 5p c) Demonstrați că $E(x, y) \geq 4$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$.
2. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $\angle BAC > 45^\circ$ și $AC > BC$, iar punctul D este proiecția punctului B pe dreapta AC . Mediatoarea segmentului AB intersectează dreptele BD , AC și paralela prin punctul C la dreapta AB în punctele M , N , respectiv P , iar E este punctul de intersecție a dreptelor AM și BN .
- 5p a) Demonstrați că dreptele AE și BN sunt perpendiculare.
- 5p b) Demonstrați că dreptele DE și AB sunt paralele.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{CQ}{DE} - \frac{QS}{AB} = 1$, unde Q și S sunt punctele de intersecție a dreptei CP cu dreptele AM , respectiv BN .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + X^3 + (m+1)X^2 - X + m$, unde m este număr complex.
- 5p a) Pentru $m = 0$, arătați că polinomul f are o singură rădăcină număr întreg.
- 5p b) Se consideră polinomul $g = X^{26} \cdot f$. Demonstrați că restul împărțirii polinomului g la polinomul $X^2 + 1$ este $2X$, pentru orice număr complex m .
- 5p c) Determinați numărul m pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x^2)e^{\arctg x}$.
- 5p a) Arătați că tangenta la graficul funcției f , în punctul $A(0, f(0))$, are panta egală cu 1.
- 5p b) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = e$, unde $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.
- 5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_{-1}^0 (2x+1)^n f'(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VI-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VI-a	
1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate	- Identificarea unui număr întreg în situații practice sau interdisciplinare (de exemplu: temperaturi, altitudini, golaveraje, debit/credit) - Reprezentarea pe axa numerelor a opusului unui număr întreg; modulul ca distanță pe axa numerelor de la origine la reprezentarea numărului - Identificarea unor contexte practic-aplicative sau teoretice care folosesc ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi
2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor	- Compararea numerelor întregi, pornind de la reprezentările acestora pe axa numerelor - Ordonarea elementelor unei mulțimi finite de numere întregi - Utilizarea regulilor specifice pentru efectuarea operațiilor cu numere întregi: adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere cu exponent natural - Validarea (prin probă) a soluției unei ecuații sau a unei inecuații în mulțimea numerelor întregi
3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi	- Aplicarea unor proprietăți ale operațiilor cu numere întregi pentru optimizarea calculelor numerice - Utilizarea regulilor de calcul cu puteri (calcule numerice) - Utilizarea eficientă a metodelor de determinare a unei necunoscute dintr-o ecuație sau inecuație (metoda mersului invers, metoda balanței, transformări ale relațiilor de egalitate/inegalitate)
4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi	- Formularea unor răspunsuri logice în raport cu cerințe de calcul numeric (corelații intradisciplinare; de exemplu: apartenența rezultatului unui calcul la o mulțime, estimarea rezultatului, utilizarea lui 0 ca factor în produse de numere) - Scrierea unei ecuații/inecuații echivalente cu o ecuație/inecuație dată - Redactarea demersului de rezolvare a unor ecuații sau inecuații în mulțimea numerelor întregi (inclusiv verificarea soluțiilor) - Transpunerea unei probleme într-o ecuație care se rezolvă în mulțimea numerelor întregi - Exprimarea unor caracteristici ale modulului, derivate din definiția acestuia ($x = a$, $x < a$, $x \leq a$, unde a și x sunt numere întregi)
5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi	- Analizarea unor situații practice în care se utilizează numere întregi - Analizarea unor consecințe posibile ce decurg din modificarea unui set de ipoteze în probleme referitoare la numere întregi - Încadrarea soluției unei ecuații într-o mulțime de numere întregi, fără a efectua calcule
6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului	- Transpunerea unei situații date în limbaj matematic, utilizând ecuații sau inecuații - Formularea de probleme cu numere întregi pe baza unei scheme date sau a unui exercițiu dat - Formularea unor probleme echivalente cu o problemă dată în contextul numerelor întregi
[...]	

Domeniu de conținut	Conținuturi
Mulțimi. Numere	3. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI • Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul unui număr întreg; compararea și ordonarea numerelor întregi • Adunarea numerelor întregi, proprietăți; scăderea numerelor întregi

	• Înmulțirea numerelor întregi, proprietăți • Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului • Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri • Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor • Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi
--	---

Notă: Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Folosind informațiile din secvența de mai sus, pentru a evalua competențele specifice formate/dezvoltate în cadrul unității de învățare „**Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi**”, elaborați cinci itemi: *un item de completare, un item cu răspuns scurt, un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.*

Pentru fiecare item propus:

- menționați competența specifică evaluată;
- menționați activitatea de învățare în cadrul căreia ați utiliza acest item;
- respectați formatul tipului de item;
- elaborați răspunsul așteptat (baremul de evaluare);
- respectați corectitudinea științifică a informației de specialitate.

**CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR**

21 iulie 2026
Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 1

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $E\left(2, \frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{\log_1 2}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2 2} = 2^{-1} \cdot \frac{1}{2} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	3p
	b) $E\left(x^n, y^n\right) = \left(x^n\right)^{\log_{y^n} 2} \cdot \left(y^n\right)^{\log_{x^n} 2} =$ $= x^{\frac{1}{n} \log_y 2} \cdot y^{\frac{1}{n} \log_x 2} = x^{\log_y 2} \cdot y^{\log_x 2} = E(x, y)$, pentru orice $x, y \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ și orice număr natural nenul n	2p
	c) $E(x, y) = 2^{\log_x y + \log_y x} = 2^{\log_x y + \frac{1}{\log_x y}}$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$ $x, y \in (1, +\infty) \Rightarrow \log_x y > 0$, deci $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq 2$, de unde obținem $E(x, y) \geq 4$, pentru orice $x, y \in (1, +\infty)$	3p
2.	a) MN este mediatoarea segmentului AB, deci $MN \perp AB$ și, cum $BD \perp AC$ și $MN \cap BD = \{M\}$, rezultă că M este ortocentrul triunghiului ABN Cum $M \in AE$, obținem $AE \perp BN$	3p
	b) $NA = NB$, deci $\sphericalangle NAB = \sphericalangle NBA$ $\triangle ABD \equiv \triangle BAE$, de unde obținem $AD = BE$, deci $\frac{AD}{NA} = \frac{BE}{NB}$, de unde rezultă $AB \parallel DE$	2p
	c) $QS \parallel AB \Rightarrow \triangle QES \sim \triangle AEB$, deci $\frac{QS}{AB} = \frac{QE}{AE}$	3p
	$QS \parallel DE \Rightarrow \triangle AQC \sim \triangle AED$, deci $\frac{CQ}{DE} = \frac{AQ}{AE}$, de unde obținem $\frac{CQ}{DE} - \frac{QS}{AB} = \frac{AQ}{AE} - \frac{QE}{AE} = 1$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $f = X(X^3 + X^2 + X - 1)$, deci 0 este rădăcină număr întreg a lui f, iar rădăcinile numere întregi ale polinomului $h = X^3 + X^2 + X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$, dacă ar exista, ar aparține mulțimii $\{-1, 1\}$ $h(-1) \neq 0$ și $h(1) \neq 0$, deci polinomul f are o singură rădăcină număr întreg	3p
		2p

	b) $m \in \mathbb{C}$, deci $g = (X^2 + 1)q + aX + b$, unde $q \in \mathbb{C}[X]$ și $a, b \in \mathbb{C}$, de unde obținem $i^{26}f(i) = ai + b$ și $(-i)^{26}f(-i) = -ai + b$ Cum $f(i) = -2i$ și $f(-i) = 2i$, obținem $a = 2$ și $b = 0$, deci restul împărțirii polinomului g la $X^2 + 1$ este $2X$, pentru orice număr complex m	3p
	c) $r = x_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ și, cum $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$, obținem $r \neq 0$, deci $m \neq 0$; $x_1 x_2 x_3 x_4 = m$, $x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = 1$, de unde obținem $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{1}{m}$, deci $\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3} + \overline{x_4} = \frac{r^2}{m}$, de unde rezultă $m = -r^2$ Cum $r^4 = m$, obținem $m = -1$, pentru care rădăcinile lui f au modulele egale	3p 2p
	2. a) $f'(x) = (2x + 1)e^{\arctg x}$, $x \in \mathbb{R}$ Tangenta are panta egală cu $f'(0) = e^{\arctg 0} = 1$	3p 2p
	b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1 + x^2)^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{\arctg x}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left((1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right)^x \cdot e^{\frac{\arctg x}{x}} \right) =$ $= e^0 \cdot e^1 = e$, deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x} = 1$	2p 3p
	c) $I_n = \left \int_{-1}^0 (2x + 1)^{n+1} e^{\arctg x} dx \right \leq \int_{-1}^0 2x + 1 ^{n+1} e^{\arctg x} dx \leq \int_{-1}^0 2x + 1 ^{n+1} dx$ $\int_{-1}^0 2x + 1 ^{n+1} dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-2x - 1)^{n+1} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x + 1)^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<i>Itemul de completare elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - respectarea corectitudinii științifice a informației de specialitate	1p 1p 1p 1p 2p
<i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului - elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) - respectarea corectitudinii științifice a informației de specialitate	1p 1p 1p 1p 2p
<i>Itemul de tip alegere multiplă elaborat:</i> - menționarea competenței specifice evaluate - menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat - respectarea formatului itemului	1p 1p 1p

- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	1p
- respectarea corectitudinii științifice a informației de specialitate	2p
<i>Itemul de tip întrebare structurată elaborat:</i>	
- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	1p
- respectarea corectitudinii științifice a informației de specialitate	2p
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme elaborat:</i>	
- menționarea competenței specifice evaluate	1p
- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat	1p
- respectarea formatului itemului	1p
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare)	1p
- respectarea corectitudinii științifice a informației de specialitate	2p