

CONCURSUL NAȚIONAL DE OCUPARE A POSTURILOR DIDACTICE/CATEDRELOR  
VACANTE/REZERVATE DIN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR  
13 iulie 2022

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- Se punctează orice modalitate de rezolvare corectă a cerințelor, în limita punctajului maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) $\frac{z}{z^2+3z+1} = \frac{1}{3}$ , deci $z^2+1=0$ $z_1 = i, z_2 = -i$ , care convin	3p
	b) $ z =1$ , deci $z\bar{z}=1$ , de unde obținem $\bar{z} = \frac{1}{z}$	2p
	$\overline{E(z)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2+3\bar{z}+1} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z}+1} = \frac{z}{z^2+3z+1} = E(z)$ , deci $E(z) \in \mathbb{R}$ , pentru orice $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ cu proprietatea $ z =1$	3p
	c) $E(z) \in \mathbb{R} \Rightarrow E(z) = \overline{E(z)} \Rightarrow \frac{z}{z^2+3z+1} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}^2+3\bar{z}+1} \Rightarrow \bar{z}^2 \cdot z + 3z \cdot \bar{z} + z = z^2 \cdot \bar{z} + 3\bar{z} \cdot z + \bar{z}$ $\bar{z} \cdot z(\bar{z} - z) + (z - \bar{z}) = 0 \Rightarrow (\bar{z} \cdot z - 1)(\bar{z} - z) = 0$ și, cum $\bar{z} \neq z$ , obținem $\bar{z} \cdot z = 1$ , deci $ z =1$	2p 3p
2.	a) Semidreapta $BM$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle DBM$ Cum unghiurile $ABM$ și $AMB$ sunt complementare și unghiurile $DBM$ și $DMB$ sunt complementare, obținem $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle DMB$ , deci semidreapta $MB$ este bisectoarea unghiului $AMD$	2p 3p
	b) Semidreapta $BM$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$ , $MA \perp AB$ și $MD \perp BC$ , deci $MA = MD$ $\triangle AMI \equiv \triangle DMI$ , deoarece $AM = DM$ , $MI = MI$ și $\sphericalangle AMI \equiv \sphericalangle DMI$ , deci $AI = DI$	2p 3p
	c) Pentru $E \in BC$ astfel încât $NE \perp BC$ obținem că $\triangle ANI \equiv \triangle ENI$ , deci $AI = EI$ , de unde obținem $EI = DI$ , deci $IQ \perp BC$ , unde punctul $Q$ este mijlocul segmentului $DE$ $PQ$ este linie mijlocie în trapezul $DMNE$ , deci $PQ \parallel MD \Rightarrow PQ \perp BC$ , de unde obținem că punctele $P, I$ și $Q$ sunt coliniare, deci $PI \perp BC$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $x \circ x^{n-1} = x \circ \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n-1 \text{ ori } x} = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = x^n = e$ , pentru orice $x \in G$	2p
	$x^{n-1} \circ x = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n-1 \text{ ori } x} \circ x = \underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = x^n = e$ , pentru orice $x \in G$ , deci $x^{n-1}$ este simetricul lui $x$ în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ”	3p

	<p><b>b)</b> <math>x^2 = e</math>, pentru orice <math>x \in G</math>, deci <math>(x \circ y)^2 = e</math>, pentru orice <math>x, y \in G</math></p> <p><math>x \circ y \circ x \circ y = e \Rightarrow x^2 \circ y \circ x \circ y = x \circ e \Rightarrow y \circ x \circ y = x \Rightarrow x \circ y = y \circ x</math>, pentru orice <math>x, y \in G</math>, deci grupul <math>(G, \circ)</math> este comutativ</p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
	<p><b>c)</b> <math>x \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n}}_{\text{de } n \text{ ori } \frac{x}{n}}\right) = \underbrace{f\left(\frac{x}{n}\right) \circ f\left(\frac{x}{n}\right) \circ \dots \circ f\left(\frac{x}{n}\right)}_{\text{de } n \text{ ori } f\left(\frac{x}{n}\right)} = \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n</math></p> <p>Cum <math>f\left(\frac{x}{n}\right) \in G \Rightarrow \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = e</math>, deci <math>f(x) = e</math>, pentru orice număr rațional <math>x</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>2.</b>	<p><b>a)</b> <math>f'(x) = \left(x + \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 2)\right)' = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{2x}{x^2 + 2} =</math></p> <p><math>= 1 + 2x\left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 2}\right) = 1 + \frac{2x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}</math>, <math>x \in \mathbb{R}</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p>
	<p><b>b)</b> <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}\right) = 1</math>, deci panta asimptotei oblice spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math> este egală cu 1</p> <p><math>f'(a) = 1 \Leftrightarrow a = 0</math> și, cum <math>f(0) = \ln \frac{1}{2}</math>, obținem că <math>y = x + \ln \frac{1}{2}</math> este ecuația tangentei la graficul funcției <math>f</math>, care este paralelă cu asimptota oblică spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>
	<p><b>c)</b> <math>g(x) = \ln(x^2 + 1) \Rightarrow S_n = \int_0^n  g(x)  dx = \int_0^n \ln(x^2 + 1) dx = x \ln(x^2 + 1) \Big _0^n - \int_0^n \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx =</math></p> <p><math>= n \ln(n^2 + 1) - 2n + 2 \operatorname{arctg} n</math>, deci <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} S_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(n^2 + 1) - 2 + \frac{2}{n} \operatorname{arctg} n\right) = +\infty</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>3p</b></p>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<p><i>Itemul de completare elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate <b>1p</b></li> <li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- respectarea formatului itemului <b>1p</b></li> <li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat <b>1p</b></li> </ul>	
<p><i>Itemul cu răspuns scurt elaborat:</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- menționarea competenței specifice evaluate <b>1p</b></li> <li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item <b>1p</b></li> <li>- respectarea formatului itemului <b>1p</b></li> <li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat <b>1p</b></li> </ul>	

<i>Itemul de tip alegere multiplă</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li><li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
<i>Itemul de tip întrebare structurată</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței/competențelor specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li><li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>
<i>Itemul de tip rezolvare de probleme</i> elaborat: <ul style="list-style-type: none"><li>- menționarea competenței specifice evaluate</li><li>- menționarea activității de învățare în cadrul căreia itemul poate fi utilizat</li><li>- precizarea unui avantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- precizarea unui dezavantaj al utilizării acestui tip de item</li><li>- respectarea formatului itemului</li><li>- respectarea corectitudinii științifice, inclusiv a răspunsului așteptat</li></ul>	<b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b> <b>1p</b>